Глава 1. АЛГЕБРА РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

Что такое рефлексивная система? Воспользуемся следующей аналогией. Представим себе «комнату смеха», в которой под некоторыми углами друг к другу расставлены зеркала. Пусть в этой комнате со стола упал карандаш. Падение карандаша будет причудливо отражаться в зеркалах, зеркала будут отражаться друг в друге. Уже искаженные траектории падения будут отражаться с различными искажениями. В комнате просверкнет лавина искаженных изображений. Эта аналогия и позволяет ответить на поставленный вопрос. Рефлексивная система — это система зеркал, многократно отражающих друг друга. Каждое зеркало—это аналог «персонажа», наделенного своей особой позицией. Весь сложнейший поток отражений зеркал друг в друге будет аналогом рефлексивного процесса.

Этот пример хорошо иллюстрирует различие между социально-психологическим явлением и физическим. Падение карандаша—физический процесс. Но если нас интересует не только это падение, а весь поток отражений, совершенный персонажами, то мы имеем дело с социально-психологическим явлением.

Представим себе исследователя, вошедшего в эту комнату (исследователь—это особое зеркало). Вся ситуация принципиально изменится. Каждое движение исследователя-зеркала будет сопровождаться непрерывным изменением многократных отражений.

Иногда мы будем говорить о «внешнем исследователе», предполагая, что он не отражается в зеркалах персонажей, которые им исследуются.

Вот, собственно, первоначальная идея нашего построения. Аналогию нельзя понимать буквально. Она служит лишь исходной иллюстрацией.

Ниже мы введем специальный аппарат, предназначенный для исследования рефлексивных процессов. В качестве эмпирии, специфической схематизацией которой является этот аппарат, выбран человеческий конфликт. Но из этого не следует, что аппарат пригоден лишь для анализа конфликтных ситуаций; просто в конфликте рефлексивные процессы выступают наиболее рельефно.

Изображение рефлексивных систем

Обозначим конфликтующих противников символами *X, Y, Z.* Чтобы принять решение, *X* должен построить модель ситуации (например, особым образом схематизировать плацдарм, на котором происходит взаимодействие, вместе с находящимися на нем войсками). В свою очередь, *Y* также строит некоторую модель ситуации, но кроме того, он может осознать, что у его противника *X* есть некоторая модель ситуации. В свою очередь, *Z* может осознать, что внутренний мир *X* и *Y* устроен именно таким образом. Успех в конфликте во многом предопределен тем, как противники имитируют внутренний мир друг друга. Не имея детализированной картины, в которой учитываются особенности рефлексивного строения внутреннего мира противника, невозможно правильно истолковать его действия. Например, некоторое перемещение на местности может решать чисто утилитарную задачу, а может явиться маневром, направленным именно на то, чтобы его отразил противник и принял соответствующее решение.

Однако даже при небольшом числе участников рефлективные процессы имеют сложное строение, и необходим специальный аппарат, позволяющий сделать их предметом анализа.

Изобразим некоторый условный «плацдарм», на котором взаимодействуют три персонажа, в виде прямоугольника и трех кругов (рис. 1). Пусть в момент t_0 персонаж *X* «осознал» ситуацию. Это значит, что у него возникла внутренняя картина плацдарма. Картина, изображения на рис. 1, оказалась перенесенной «внутрь» персонажа *X* (рис. 2). Очевидно, что вся система изменилась: у нее появились новые элементы. Пусть в момент t_1 персонаж *Y* также произвел осознание сложившейся ситуации. Чтобы изобразить последний процесс, мы должны внутри круга *Y* перерисовать картину, изображенную на рис. 2 (результат этого «осознания» отображен на рис. 3), Если в момент t_3 осознание вновь создавшейся ситуации произвел *Z,* то мы должны были бы перерисовать все, изображенное на рис. 3, внутрь круга *Z.* Однако сделать это было бы уже трудно по чисто графическим причинам, да и оперировать с таким изображением крайне неудобно. Поэтому целесообразно ввести специальный «алгебраический язык», который позволяет изображать подобные процессы любой сложности.

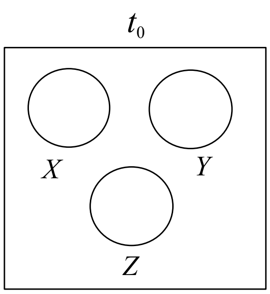

Рис. 1

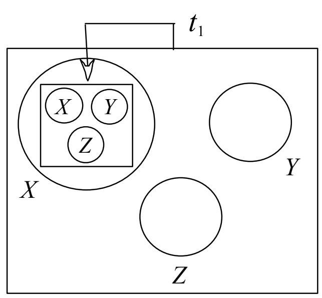

Рис. 2

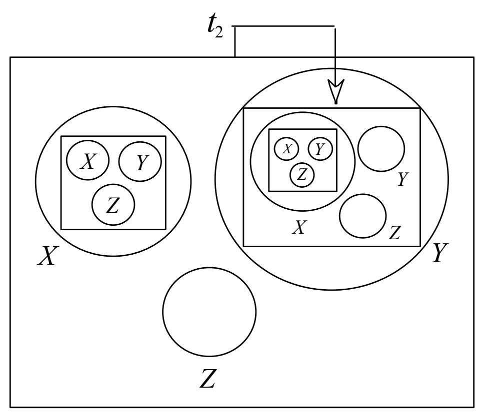

Рис. 3

Будем изображать символом *T* плацдарм, на котором действуют персонажи. Этому символу соответствует рис. 1. Картины этого плацдарма, которые могут лежать перед персонажами *X, Y* и *Z,* обозначим соответственно *Tx, Ty, Tz*. (читается: *«T* с позиции *X», «T* с позиции *Y», «T* с позиции *Z»).* Элементы *Tx, Ty, Tz* возникают как результат осознания. На рис. 2 изображен случай, когда осознание произвел персонаж *X,* но, разумеется, все сказанное справедливо для любого персонажа. Картины, которые есть у одних персонажей, могут отражаться другими. В результате возникают элементы *Txy, Txz, Tyz* и т.д. (читается: *«Tx с* позиции *Y», «Tx* с позиции *Z», «Ty* с позиции *Z* и т.д.»). Элементы с двумя индексами также могут отражаться, в результате чего возникают элементы *Txyz, Txzy, Tzxy* и т.д. Они читаются соответственно — *«Txy* с позиции *Z»* и т.д. Картина, которую некоторый персонаж имел в момент t_1, может быть также осознана им, уже в момент t_2 , причем осознана именно как картина, а не как некоторая «физическая реальность». Вследствие этого возникают элементы типа *Txx, Tyy, .Txxx* и т.д.

Теперь изобразим процесс взаимоотношения трех персонажей .на плацдарме. В момент t_0 в нашей модели никаких внутренних картин у персонажей нет (рис. 1). Системе s этом случае соответствует символ *T*. Рефлексивную систему, изображенную на рис. 2, можно представить в виде суммы

$$\Omega_1 = T + Tx. \qquad (1)$$

Она содержит две компоненты: плацдарм и картину плацдарма, лежащую перед *X*∗ Системе, изображенной на рис. 3, соответствует следующий многочлен:

$$\Omega_2 = T + Tx + (T + Tx)y. \qquad (2)$$

Сумма, находящаяся в круглых скобках, это *«T+Tx* с позиции *Y»,* ей соответствует картина на рис. 2, перенесенная внутрь круга *Y* на рис. 3. Подобная символика устраняет трудности, возникающие при графическом изображении таких систем, и тем более трудности, возникающие при фиксации их в естественном языке. Рефлексивную систему после того, как очередное осознание произвел персонаж *Z,* мы теперь легко можем изобразить так:

$$\Omega_3 = T + Tx + (T + Tx)y + [T + Tx + (T + Tx)y]z. \qquad (3)$$

Представляется естественным ввести относительно правого индекса закон дистрибутивности, который позволит раскрыть скобки. Например, следующие выражения будут эквивалентными:

$$T + Tx + (T + Tx)y = T + Tx + Ty + Txy.$$

Этот закон может быть интерпретирован двумя способами. Вынесение индекса за скобку можно рассматривать с позиции «внешнего исследователя». В этом случае внешний исследователь «выделяет» с помощью этой операции «внутренние миры» отдельных персонажей и, тем самым, получает возможность рассматривать эти внутренние миры в их целостности. Но из этого не следует, что у самих персонажей есть целостная картина. С другой стороны, вынесение индекса можно рассматривать именно как возникновение у персонажа целостной картины, т.е. это некоторая операция, происходящая «внутри» персонажа.

Кроме того, мы позволим репродуцировать слагаемые без нарушения эквивалентности многочленов. Например,

$$T + Tx = T + Tx + Tx.$$

Это вызвано тем, что персонаж (или исследователь) не получает новой информации в результате репродуцировавший уже известного ему «текста».

Обратим внимание на то, что это изображение не позволяет получить информацию об адекватности отражения персонажами картин, лежащих перед другими персонажами. Например, пусть мы имеем два члена *Tx и Txy.* Персонаж *Y* может иметь как адекватное

∗ Введение знака “+” оправдано формальными операциями, которые будут введены ниже.

отражение *Tx,* так и принципиально неадекватное. Символика регистрирует лишь факт «существования» такого члена во внутреннем мире персонажа *Y.* Поэтому при употреблении символики необходим специальный комментарий, характеризующий степень адекватности с позиции внешнего исследователя.

Операторы осознания

Теперь мы введем специальный формализм для фиксации процесса осознания. Для этого мы должны найти формальный способ изображения перехода от выражения (1) к выражению (2), от выражения (2) к выражению (3) и т.д.

Многочлены, которые были введены, существенно отличаются от «обычных» многочленов с вещественными коэффициентами. Поэтому необходимо строго ввести тот .алгебраический объект, с которым мы будем иметь дело в дальнейшем. Исходными для построения формализма (для трех персонажей) являются символы *x, y, z, T и* 1. Из этих символов составляются слова — конечные последовательности символов, например, *x, xy, Tx, xyz* и т.д. - Два слова считаются эквивалентными, если они отличаются только числом вхождения в них символа 1 (например, $x1xy1=xxy$). Таким образом, символ 1 можно вычеркивать из слов.

Условимся пока рассматривать слова, не содержащие символа *T.* Множество всех таких слов счетно. Перенумеруем их некоторым произвольным образом. Получим последовательность a_i. Теперь мы можем ввести понятие многочлена.

Многочленом мы будем называть символическую сумму

$$\omega = \sum_{i}^{\infty} \alpha_i a_i$$

где a_i—элемент булевой алгебры, состоящей из двух элементов 0 и 1*.

При заданной нумерации a_i многочлен однозначно задается набором коэффициентов α_i. Условимся в дальнейшем выписывать лишь те члены, коэффициенты перед которыми равны 1. Необходимо обратить внимание на отличие многочлена от отдельного слова. Если мы пишем, например, $\omega = 1$, то это значит, что рассматривается многочлен $1 + \sum_{i=2}^{\infty} 0a_i$, в котором только перед $a_1 = 1$ коэффициент отличен от нуля.

Теперь можно ввести операции сложения и умножения многочленов. Они вводятся так же, как и операции над «обычными» многочленами, с той лишь существенной разницей, что умножение оказывается некоммутативным. Нетрудно видеть, что умножение ассоциативно и выполняются правый и левый законы дистрибутивности:

$$\omega_1(\omega_2 + \omega_3) = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3$$

$$(\omega_2 + \omega_3)\omega_1 = \omega_2\omega_1 + \omega_3\omega_1$$

---

* Напомним, что эти элементы связаны следующими соотношениями: 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 · 1 = 1, 1 · 0 = 0, 0 · 1 = 0, 0 · 0 = 0.

Каждому многочлену сопоставим в соответствие специфический многочлен $\Omega = T\omega$. Многочлены Ω, как мы показали раньше, позволяют изображать состояния рефлексирующих систем, а многочлены ω будут интерпретированы как операторы осознания.

Теперь мы можем выразить на алгебраическом языке процедуры превращения картинки на рис. 1 в картинку на рис. 2 и т.д. Для этого необходимо многочлен T, выражающий содержание картинки на рис. 1, умножить справа на многочлен $1 + x$. Результатом такого умножения будет многочлен

$$\Omega_1 = T(1 + x) = T + Tx. \qquad (1')$$

Чтобы перейти далее к состоянию Ω_2. многочлен Ω_1 нужно опять-таки справа умножить на многочлен $1 + y$:

$$\Omega_2 = T(1 + x)(1 + y) = T + Tx + (T + Tx)y. \qquad (2')$$

расстояние Ω_3 порождается умножением Ω_2 на $1 + z$:

$$\Omega_3 = T(1 + x)(1 + y)(1 + z) = T + Tx + (T + Tx)y + [T + Tx + (T + Tx)y]z. \qquad (3')$$

Таким образом, той процедуре осознания, которую мы изобразили графически (она представляет собой схематизацию естественно-интуитивного понимания рефлексии), соответствует теперь алгебраическая операция умножения многочлена на многочлены $1+x$, $1+y$, $1+z$.

Мы только что описали случай, когда персонажи производят осознание последовательно. Но легко изобразить и случай, когда осознание производят все три персонажа одновременно.

Оператор осознания будет таким: $\omega = 1 + x + y + z$, а эволюция многочлена, характеризующего состояния рефлексирующих систем, выразится соотношением $\Omega_n = T(1+x+y+z)^n$, где n — число осознаний. Подобное изображение процессов осознания значительно расширяет возможности исследования более сложных типов осознания, которые уже практически невыразимы в естественном и графическом языке.

Оператор, порождающий принцип максимина

Принцип максимина лежит в основе современной идеологии принятия решений. Он заключается в том, что принимающий решение должен гарантировать себе «минимальный проигрыш». Посмотрим, каково «рефлексивное строение» игроков, породившее эту идеологию.

Вместе с исследователем операций встанем на позицию одного из игроков, например *X*. Игрок *X* должен принять решение, и оно должно быть наилучшим, т.е. при другом решении у противника будет возможность принять свое решение, в результате которого проигрыш *X* станет большим. Предположим, что игрок *X* не вооружен уже готовой концепцией, которая позволяет ему принимать решения «не думая». Каждому варианту своего решения он «мысленно» противопоставляет наилучшее решение противника.

Таким образом, противник присутствует во внутреннем мире персонажа X и непрерывно следит за его мыслями.

Рассмотрим игрока, который изображается следующим многочленом:

$$\Omega^* = T + (\Omega + \Omega y)x. \qquad (4)$$

Внутренний мир этого игрока устроен таким образом, что любая «картина», в том числе и «картина самого себя», которая есть у игрока, адекватно (с его позиции) отражается его противником*. В силу этого любая мысль, осознанная им как собственная, также отражается противником. Если игрок X вступает в конфликт с игроком Y, то подобное устройство внутреннего мира приводит игрока X к необходимости использовать принцип максимина, т.е. принимать такое решение, чтобы противник, даже зная его и приняв, в свою очередь, наилучшее решение, нанес ему минимальный ущерб.

Во многих конфликтах, однако, подобная детерминированная «оптимальная мысль» не присутствует (все мысли неудовлетворительны). Это вынуждает игрока нейтрализовать дедукцию противника: он должен принять решение не рассуждая, т.е. в той или иной форме бросить жребий. Читая его мысли, противник не может в этом случае вывести выбранное решение (считается, что единичное выпадение игральной кости нельзя проимитировать), но конечно, сразу же установит, что для выбора решения использовался случайный механизм. Классическая теория игр, развитая Дж. фон Нейманом, и отвечает на вопрос, как бросать жребий в некоторых ситуациях подобного рода. В нашем случае простейший оператор осознания, порождающий и сохраняющий подобное строение внутреннего мира игрока X имеет следующий вид:

$$\omega = 1 + x + yx.$$

Каков смысл этого оператора? Игрок, который «исповедует принцип максимина, изображается выражением (4). Мы предполагаем, что многочлен может измениться лишь в результате акта осознания. Если бы мы предположили, как в рассмотренных выше примерах, что работает оператор осознания

$$\omega = 1 + x,$$

то применение этого оператора к многочлену (4) привело бы нас к другому многочлену, который уже не представим подобным образом. Но мы хотим, чтобы игрок X, даже совершая акты осознания продолжал бы «исповедовать» принцип максимина, т.е. вид многочлена должен быть инвариантен к акту осознания:

$$[T + (\Omega + \Omega y)x]\omega = T + (\Omega' + \Omega' y)x$$

---

* Конечно, при предположении, что картина Ω, лежащая перед X, тождественна картине Ω, лежащей перед Y с позиции X.

Внутренний мир персонажа *X* в результате осознания может измениться, но персонаж *Y* должен по-прежнему играть роль «внутренней мажоранты» контролирующей с позиции персонажа *X* любую его мысль.

Нетрудно видеть, что оператор

$$\omega = 1 + x + yx$$

оставляет вид многочлена $\Omega^* = T + (\Omega + \Omega y)x$ неизменным:

$$\Omega^*(1 + x + yx) = [T + (\Omega + \Omega y)x](1 + x + yx) = T + \Omega\, x + \Omega yx + \Omega^* x + \Omega^* yx =$$

$$= T + [(\Omega + \Omega^*) + (\Omega + \Omega^*)y]x = T + (\Omega' + \Omega' y)x,$$

Таким образом, если персонаж *X* имеет единственный оператор осознания $\omega = 1 + x + yx$, то он изображается многочленами вида (4) и навсегда обречен «исповедовать» принцип максмина. Персонаж замкнут этим оператором. Многократное его применение не меняет в принципе структуры многочлена.

Оператор $1 + x + yx$ порождает особое « рефлексивное замыкание». Осознание того, что он «устроен таким образом», изменяет его представление о самом себе, но при этом оказывается, что персонаж *Y* выступает как своеобразное «всевидящее» око, сразу же отразившее эту новую картину «самого себя». Осознание не удаляет этого «всевидящего ока», сохраняющего свою доминирующую позицию. Персонаж *X* может адекватно отразить свое устройство, но этот факт будет одновременно с его позиции отражен персонажем *Y*.

Обратим внимание на то, что многочлен может развертываться через последовательные осознания без какой бы то ни было информации, поступающей извне. Новая информация возникает в результате отражения предыдущего состояния. Иначе говоря, оператор, порождающий принцип максимина, является особой формой самоосознания.

Можно предположить, что этот оператор лежит в основе некоторых типов религиозного мышления. Бог кальвинистов является «всевидящим оком», контролирующим любую мысль. Работа оператора осознания никак не контролируется персонажем. Акт осознания—»естественное явление». Это может приводить к парадоксальным и тяжелым для верующего состояниям, когда он полагает себя неверующим, но это «полагание» в силу автоматической работы оператора мажорируется. Бог продолжает присутствовать во внутреннем мире.

Работу оператора осознания можно пояснить с помощью рис. 4. Персонажу *X* мы «придаем» экран сознания. Он изображен квадратом. К этому экрану снаружи прочно прикреплен человечек *Y;* хотя он находится вне поля экрана, он воспринимается персонажем *X.* Содержание, «высвечиваемое» на экране, поступает к персонажу *X* по двум каналам. С одной стороны, непосредственно от экрана, с другой стороны — опосредованно, через человечка *Y,* который неустраним актом осознания, поскольку этот акт выступает как возникновение некоторого изображения внутри квадрата. В частности, если над экране сознания отразилась ситуация, изображенная на рис. 4, то это не изменит строения процесса осознания (рис. 5), точно так же, как высвечивание на киноэкране механизма кинопроектора не влияет на работу самого кинопроектора. Содержание экрана по-прежнему будет поступать к персонажу *X* по двум каналам, подобное графическое изображение оператора осознания, хотя и не дает возможности фиксировать достаточно тонкие черты процесса, но зато позволяет в грубой форме фиксировать явления, которые не схватываются алгебраическим аппаратом.

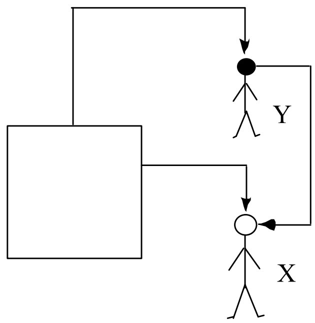

Рис. 4

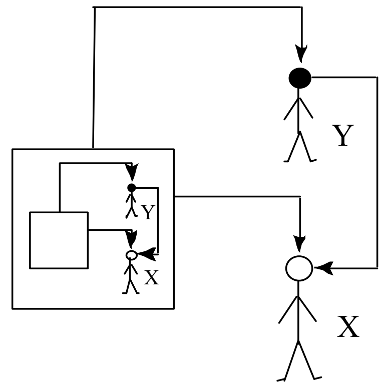

Рис. 5

Мы можеt, например, «нанести на экран» особый «рисунок», который с позиции персонажа неотличим от проецируемого изображения. С позиции внешнего исследователя лишь часть содержания является результатом проецирования, в то время как персонаж не отличает элементы, «нарисованные» на экране, от элементов спроецированных на экран.

Другие типы рефлексивных замыканий

Инвариантность типа многочлена по отношению к оператору осознания может быть выражена следующим очевидным тождеством:

$$(T + \Omega\omega)(1 + \omega) \equiv T + \Omega'\omega \ ,$$

где $\Omega' = T + \Omega + \Omega\omega$.

Рассмотрим оператор

$$\omega = 1 + x^2.$$

При однократном применении он порождает многочлен

$$\Omega_1 = T + Txx.$$

Перед персонажем X лежит не плацдарм T, а картина этого плацдарма, отраженная им самим. Это случай «солипсоидного» внутреннего мира. Реальность T с позиции персонажа X всегда выступает лишь как элемент его внутреннего мира. Осознание своего подлинного состояния Ω_1 посредством оператора $\omega = 1 + x^2$ вновь приводит к солипсоидному внутреннему миру, т.е. тип этого внутреннего мира замкнут относительно данного оператора. Действительно,

$$(T + \Omega xx)\ (1 + x^2) = T + \Omega' xy.$$

Оператор осознания $1 + x^2$ обрекает персонажа вступать в отношение с реальностью лишь как с элементом своего внутреннего мира. Если подобный персонаж выступает в роли внешнего исследователя, то член *T* в «лежащем перед ним многочлене» будет отсутствовать. Этому оператору осознания соответствует рис. 6.

Прямой канал от экрана сознания к персонажу отсутствует. Существует лишь канал, идущий к персонажу *X* через человечка *X*.

Рассмотрим оператор

$$\omega = 1 + yx.$$

Его однократное применение порождает многочлен

$$\Omega_1 = T + Tyx.$$

Мир, лежащий перед персонажем *X*, — это феномен, протекающий внутри другого персонажа. Это патологическое состояние в силу справедливости соотношения

$$[\mathrm{T} + \Omega yx](1 + yx) = \mathrm{T} + \Omega' yx$$

также является замкнутым. Подобному оператору соответствует рис. 7.

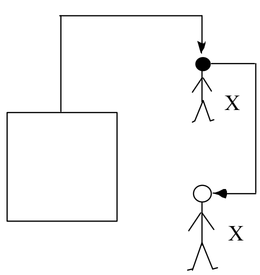

Рис. 6

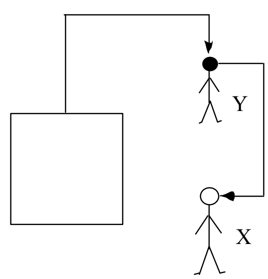

Рис. 7

Непосредственная связь между персонажем *X* и экраном сознания, как и в случае солипсоидного экрана, отсутствует. Канал проходит через персонажа *Y*.

Рассмотрим оператор

$$\omega = 1 + x + x^2.$$

Персонаж, «вооруженный» таким оператором, производит «двойное» осознание. Факт отражения сам одновременно отражается (рис. 8).

Нетрудно видеть, что простейшему оператору

$$\omega = 1 + x$$

будет соответствовать изображение, представленное на рис. 9.

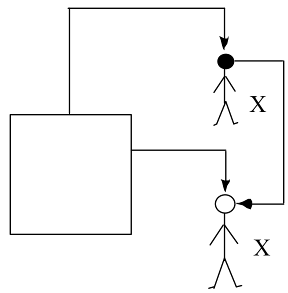

Рис. 8

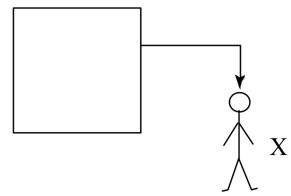

Рис. 9

Рассмотрим более сложный оператор осознания, который нам понадобится впоследствии:

$$\omega = 1 + x + yx + zx + yzx.$$

Его многократное применение будет порождать многочлены вида

$$\Omega' = T + [\Omega + \Omega y + (\Omega + \Omega y)z]x.$$

С позиции *X* любая картина или мысль, осознанная им как собственная, имитируется персонажем *Y,* а персонаж Z, также имитируя любую мысль и любую картину, осознанную персонажем *X* как собственную, имитирует сам факт имитации персонажем *Y* картин и мыслей, осознанных персонажем *X* (рис.10). Вне экрана уже расположен своеобразный коллектив персонажей, который неустраним актом осознания. Эти персонажи находятся в различных отношениях имитационной субординации.

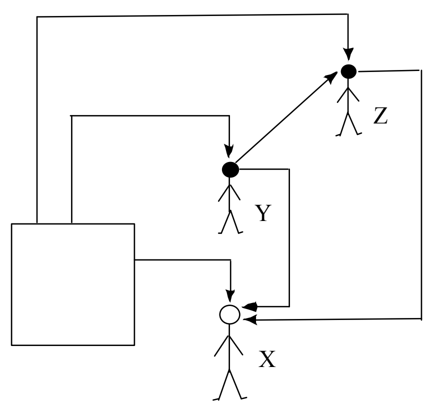

Рис. 10

Можно предположить, что подобный оператор осознания отражает некоторые черты православного и католического мышления. Бог—это персонаж *Z*, священник—персонаж *Y.* Процедура исповеди служит средством «поддержания» этого оператора осознания. Персонаж *Y с* позиции *X,* присутствуя актуально, «мажорирует» его внутренний мир. При подготовке к исповеди и в ее процессе внутренний мир вербализуется и приводится в удобный для «мажорирования» вид. Функция персонажа *Y* в этой ситуации заключается в активизации процесса самоосознания, ибо без наличия самоосознанных картин во внутреннем мире *X* не может произойти их отражение во внутреннем мире *Z.*

Задача восстановления истории формирования многочлена

Алгебраический подход к рефлексивным структурам порождает некоторые специфические задачи. Например, возникает вопрос: может ли система, находящаяся в состоянии Ω_1, посредством «срабатывания» некоторого оператора осознания перейти в состояние Ω_2. Ответ на вопрос сводится к решению задачи о существовании решеяия уравнения

$$\Omega_1\omega = \Omega_2$$

Это линейное относительно ω уравнение может иметь неединственное решение, а может не иметь решения вообще. Например, уравнение $(1 + x)\omega = 1 + x + x^2 + x^3$ имеет два решения $\omega_1 = 1 + x + x^2$, $\omega_2 = 1 + x^2$, а уравнение $(1 + x)\omega = 1 + x^3$ не имеет решений.

До сих пор мы предполагали, что персонаж наделен лишь одним оператором осознания. Теперь мы откажемся от этого предположения и позволим персонажу иметь набор операторов. В рамках нашего специального построения можно поставить вопрос о восстановлении «истории» формирования определенного состояния Ω. Для этого необходимо представить Ω в виде произведения сомножителей

$$\Omega = T\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k .$$

Естественно, что в силу неоднозначности разложения мы можем получить не одну, а некоторое множество траекторий, т.е. последовательностей, в которых «срабатывали» операторы, порождая это состояние.

Особый интерес представляет вопрос о разложении многочленов на неприводимые множители — многочлены. Неприводимыми мы называем многочлены, которые нельзя представить как произведение двух многочленов, каждый из которых отличен от 1. Неприводимые множители можно интерпретировать как «элементарные» акты осознания.

Заметим, что в построенном исчислении не будет справедлива теорема о единственности разложения на неприводимые множители. Например, многочлен $\omega = 1 + x + x^2 + x^3$ представим двумя следующими способами:

$$\Omega = (1 + x)^3 = (1 + x)\,(1 + x^2).$$

Конечно, подобное «восстановление истории» имеет смысл лишь в рамках данной модели со всеми принятыми ограничениями, самым существенным, из которых является то, что аналогом осознания выступает некоторый множитель.

Ниже будет показано, что мыслимы другие механизмы развертывания многочленов. Изложенный здесь способ «восстановления истории», представляет собой частный и простейший случай.

Различные истолкования манипуляций с рефлексивными многочленами

Рассмотрим многочлен $\Omega = T + Tx + Tx^2 + Tx^3$. Формально мы можем его привести к виду

$$\Omega = T\omega = T(1 + x)^3.$$

Многочлен в развернутой форме, фиксирующий состояние системы, «приравнивается» к записи процесса своего формирования с позиции внешнего исследователя.

Этот же многочлен может быть изображен двумя другими способами:

$$T + [T + Tx + Tx^2]x = T + [T(1 + x)^2]x.$$

Теперь в положение внешнего исследователя поставлен персонаж *X.* Мы можем истолковывать «содержимое» его внутреннего мира двояко. В левой части перед ним лежит состояние системы, а в правой фиксируется динамика формирования состояния. Наконец, различие в записи может быть объяснено удобством рассмотрения системы внешним исследователем. В этом случае запись

$$\Omega = T + [T(1 + x)^2]x$$

будет фиксировать лишь «свертку» лежащего перед персонажем *X* развернутого состояния, проделанную внешним исследователем.

Персонажи не владеют рефлексивным анализом. Поэтому, когда мы приписываем персонажу внутренний мир, представленный в виде многочлена, возникает опасность, что мы заставим его созерцать особенности нашего искусственного аппарата, а не то содержание, которое мы хотели бы выразить посредством нашей символики. Рассмотрим в этой связи многочлен

$$\Omega = T + [T(1 + x)^n]x.$$

Как мы можем истолковать букву n ? Если мы скажем, что n—некоторое фиксированное число, то запись нужно понимать в соответствии с комментарием, приведенным выше.

Ну, а если n - это «любое число» с позиции *X?* Что это означает? Ведь бессмысленно утверждать, что персонажу *известен закон формирования многочлена,* персонажу может быть *известен некоторый принцип,* который фиксируется исследователем с помощью символа n. В данном примере естественно предположить, что такая запись означает: персонаж вскрыл рекурсивный принцип формирования состояний, в которых он может находиться.

А как предстает эта ситуация с позиции внешнего исследователя, владеющего языком многочленов? Отразив персонажа *X,* он на своем языке должен зафиксировать, что n— буквенная переменная с позиции персонажа (!). Может ли они дальше пользоваться формальными принципами исчисления? Ведь произведя нехитрые преобразования, он получит

$$T + [T(1 + x)^n]x = T(1 + x)^m, \;\; m = n + 1,$$

где m—любое целое, но уже с позиции внешнего исследователя. Не выплеснул ли он при этом преобразовании тот факт, что *X* вскрыл принцип? Ведь запись

$$\Omega = T(1 + x)^m$$

означает, что персонаж таков, что оператор $\omega = 1 + x$ может употребляться подряд произвольное число раз и только.

Да, он выплеснул факт, что принцип вскрыт. Но он может выйти из положения, введя дополнительную аксиому, что персонаж *X* владеет принципом индукции, который позволяет ему вскрыть принцип своего рекурсивного устройства.

При любом фиксированном *m* многочлен может быть представлен таким образом:

$$\Omega_m = T(1+x)^m = T + \left[\sum_{i=1}^{m} T(1+x)^{i-1}\right]x =$$
$$= T + [T + \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_{m-1}]x\,,$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{m-1}$ - последовательность состояний, в которых находился персонаж *X*.

Аксиома «позволяет» персонажу провести анализ своей «истории», но представимость состояний, необходимых для такого анализа, обеспечивается формальным аппаратом. Использование аксиомы, приписывающей персонажу *X* «обладание» принципом индукции, является определенной уступкой обыденным способам рассуждений. Допустимо иное рассуждение: равенство

$$T + [T(1+x)^n]x = T(1+x)^m$$

справедливо уже только потому, что такова алгебраическая природа рассматриваемых нами процессов. Таким образом, возможность получения обобщенного портрета самого себя не требует с необходимостью принципа индукции. Сам принцип индукции в этом случае может рассматриваться как проявление работы «глубинных» алгебраических процессов.

Аналогичные рассуждения будут справедливы и для ситуации

$$\mathbf{\Omega} = T(1+x+y)^m\,.$$

$$T(1+x+y)^m = T + [T(1+x+y)^{m-1}]x + [T(1+x+y)^{m-1}]y =$$
$$= T + [T(1+x+y)^n]x + [T(1+x+y)^n]y\,.$$

Таким образом, каждый персонаж может адекватно отразить не только себя самого, но и систему, элементом которой он является.

Выявление принципа или, на языке внешнего исследователя, использующего данный аппарат,—оператора осознания и способа его работы, не приводит к смене этого оператора осознания. Он и дальше продолжает работать автоматически.

Представим себе, что персонаж, имеющий оператор $\omega = 1 + x + yx$, вскрыл принцип мажорирования, не тот факт, что данное состояние мажорируется, а именно принцип*. Этот принцип «формулируется» на его экране сознания, который по-прежнему мажорируется персонажем *Y* (рис.11).

---

* Фиксация персонажа в виде $Q=T(1+x+yx)^n$ уже таит в себе возможность того, что принцип будет им вскрыт, поскольку $T(1+x+yx)^n=T+[T(1+x+yx)^{n-1}+T(1+x+yx)^{n-1}y]x$. Это следует из тождества $T(1+\omega)^n=T+T(1+\omega)^{n-1}\omega$ при $\omega=x+yx$. Адекватное отражение своей сущности не уничтожает мажоранту.

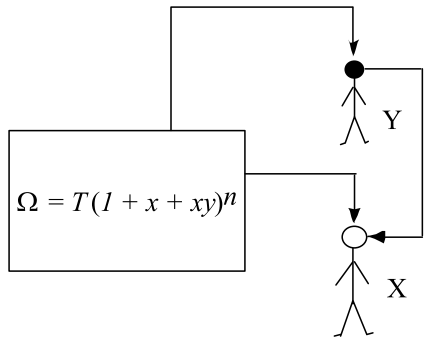

Рис. 11

Или в аналитической записи

$$T + [T(1 + x + yx)^n] + [T(1 + x + yx)^n y]x.$$

Обратим внимание на то, что в этом случае вскрытие принципа не дает персонажу адекватной картины действительности с позиции внешнего исследователя, однако он имеет абсолютно адекватную картину самого себя.

Условимся еще об одном истолковании буквы n. Персонаж может имитировать некоторую ситуацию, которая с позиции внешнего исследователя подчиняется определенному закону, однако сам этот закон или принцип персонажем не выделен. Рассмотрим, например, персонажа

$$\Omega = T + [T(1 + x + y)^n]x.$$

Мы можем истолковать эту запись как фиксацию факта, что во внутреннем мире X работает своеобразная машина, которая последовательно «гонит» параметр n по .натуральному ряду. В этом случае запись фиксирует динамику процесса во внутреннем мире, а не фиксацию принципа. В следующем параграфе, в котором мы будем анализировать «дилемму заключенного», предыдущее выражение будет пониматься именно в таком смысле.

Рефлексивные многочлены, порождающие дилемму заключенного

Дилемма заключенного является превосходной моделью, показывающей, что существуют ситуации, когда обыденные представления о рациональном поведении оказываются неприменимыми. Известный американский исследователь Анатоль Рапопорт полагает, что дилемма заключенного принадлежит к тем парадоксам, которые «иногда появляются на интеллектуальном горизонте, как предвестник важных научных и философских открытий» [26].

Дилемма, открытие которой приписывается американскому исследователю Таккеру, заключается в следующем. Двух подозреваемых берут под стражу и изолируют друг от друга. Прокурор убежден в том, что ими совершено серьезное преступление, но не имеет достаточных доказательств для предъявления им обвинения. Каждому заключенному говорится, что у него имеется альтернатива: признаться в преступлении или не признаться. Если оба не признаются, то прокурор предъявит им обвинение в каком-либо незначительном преступлении, например, в незаконном хранении оружия, и оба получат небольшое наказание; если они оба признаются, то суд накажет обоих, но прокурор не потребует самого строгого приговора; если же один признается, а другой будет упорствовать, то признавшемуся приговор будет смягчен за выдачу сообщника, в то время как непризнавшийся получит самое строгое наказание. Любое решение, которое примет заключенный, неудовлетворительно с точки зрения рациональности, действительно, если он примет решение не признаваться, а его партнер признается, то он понесет значительный ущерб. Если же он признается, а партнер будет молчать, то он также понесет ущерб, по сравнению со случаем, если бы он не признался.

Мы попытаемся проанализировать некоторые рефлексивные механизмы, которые, как нам представляется, порождают эту дилемму, но построим другой пример, который облегчит анализ.

Представим себе следующую условную ситуацию. Пусть *X* и *Y* — противники, вооруженные пистолетами. Если *X* застрелит *Y,* то *X* получит рубль. Если *Y* застрелит *X,* то *Y* получит рубль. Игроки не несут ни морального, ни юридического ущерба, если оказываются «убийцами». Решение игроки принимают независимо и не могут связаться друг с другом. Спрашивается, как они должны поступить. *X* проводит такое рассуждение: «Предположим, я выстрелю; тогда я либо выиграю рубль, либо погибну. Если я не выстрелю, я наверняка не выиграю рубль, но вероятность моей гибели не станет от этого меньше. Ведь мой противник принимает решение совершенно независимо ... Но противник проведет точно такое же рассуждение и тоже нажмет на спусковой крючок. Может быть, если я не нажму на крючок, то и он не нажмет на крючок... Нет, не проходит, ведь наши решения не связаны. Конечно, нам обоим выгодно не нажимать на спуск. Это он выведет. Он так и поступит! Ага, я выстрелю тогда и выиграю рубль. Но к такому же решению придет и он...».

В выделенном тексте приведено рассуждение игрока, который пытается принять решение, и сталкивается с непрерывными противоречиями. Оба варианта решения одинаково неубедительны. Чтобы выявить причину парадокса, представим себе следующую ситуацию: пусть те двое, вооруженные пистолетами, разделены перегородкой из тонкой зеркальной фольги, которая не является препятствием для пули. *X* «видит» своего противника. *X* медленно поднимает пистолет и видит, что модель противника также поднимает пистолет, и на лице модели появляется угрожающее выражение. *X* понимает, что если он нажмет на крючок, то и модель нажмет на крючок. Поскольку эта модель—единственное средство прогнозировать поведение своего противника, то свой выстрел порождает и выстрел модели. *X* медленно опускает пистолет. Противник также медленно опускает пистолет. «Я сейчас обману противника, — думает *X,* — он наверняка пользуется такой же моделью», — и тут же видит хитроватое выражение на лице модели и предупредительное движение пистолета.

Текст рассуждения, приведенный ранее, является порождением именно такой ситуации с зеркалом, когда сам игрок используется как модель своего противника. Любая мысль, которая приходит ему в голову, автоматически приходит в голову его сопернику. Они стоят друг перед другом и синхронно рассуждают, синхронно читают мысли друг друга. Игрока *X,* принимающего решение по такой схеме, можно изобразить следующим многочленом:

$$\Omega n = T + (Tx + Ty)x + (Tyx + Txy)x + (Txyx + Tyxy)x + \dots$$

Каждая картина с позиции *X,* лежащая перед ним самим, лежит и перед его партнером. С помощью внешнего множителя рефлексивный процесс, сохраняющий подобную симметрическую структуру «внутри» персонажа *X* выразить невозможно. Мы должны ввести «вложенные» операторы осознания. Формально многочлен можно переписать так:

$$\Omega_n = T + [T(1 + x + y)^n]x.$$

Независимо от значения *n* внутренний мир персонаж *X* будет представлять собой симметрический многочлен. Любое решение, которое выработал персонаж *X,* автоматически принимается его противником. Если *X* принимает решение стрелять, то и противник принимает решение стрелять. Аналогично, если *X* принимает решение не стрелять, то и противник принимает решение не стрелять, но тогда *X* принимает решение стрелять, которое немедленно принимается противником. Таким образом, мы видим, что дилемма порождается тождественностью решений, которые принимают противники во внутреннем мире *X.*

Представляется очень важным точно сформулировать вопрос: перед кем стоит дилемма? Часто путают подлинную дилемму, которая в подобных ситуациях возникает перед игроком, с задачей, стоящей перед исследователем операций, который должен рекомендовать оптимальное решение.

Оптимальное решение в условиях дилеммы заключенного невозможно. Отсутствие возможности найти оптимальное решение само по себе не является парадоксом. Парадокс возникает перед игроком, который, имея определенную модель противника, принимает оптимальное решение, которое сразу же оказывается убийственным для него. Обратим внимание, что если бы игрок *X* был «устроен» иначе, например, был бы «вооружен» оператором осознания $\omega = 1 + x + yx,$ который бы приводил его в состояние

$$\Omega = T + (\Omega + \Omega y)x\ ,$$

то никакой дилеммы перед ним не возникало бы. Он должен стрелять. Действительно, предположим, что игрок *X* принял решение не стрелять; поскольку *Y* - «всевидящий глаз», читающий его мысли, то он примет решение стрелять, чтобы выиграть рубль. Поэтому ему остается только другая альтернатива - стрелять. При этом, с позиции *X,* решение *Y* не определено. Мы ведь не предполагаем, что противники исповедуют принцип «зло за зло»*.

---

* Заметим, что оператор осознания $\omega = 1 + x + yx,$ будучи “погруженным” в подобную ситуацию, приводит обоих игроков к гибели, если они оба “вооружены” им, а в ситуации со строгим соперничеством, как мы показали выше, этот оператор порождает максиминное решение. Таким образом, один и тот же оператор в различных ситуациях может порождать совершенно различные типы поведения. Этот факт представляется нам чрезвычайно важным, ибо демонстрирует автономию рефлексивных процессов относительно решений и поведения.

Таким образом, мы приходим к выводу, что дилемма порождается симметрической рефлексивной структурой внутреннего мира игрока.

Дилемму заключенного нельзя разрешить, но ее можно объяснить.

Позитивные и негативные формы

Рассмотрим следующий многочлен

$$\Omega = T + (T + Tx^3)x + (T + Tx + Tx^2 + Ty)y.$$

Как обычно, мы предполагаем, что такова система Ω с позиции внешнего исследователя. Поставим задачу—сравнить «внутренние миры» персонажей с картиной, лежащей перед исследователем. Для этого построим следующую таблицу:

External observer	T	Tx	Tx^4	Ty	Txy	Tx^2y	Ty^2		
X	T							Tx^3	
Y	T	Tx		Ty					Tx^2

Пустые клетки второй и третьей строк соответствуют членам, которые присутствуют с позиции внешнего исследователя, но отсутствуют во внутренних мирах соответствующих персонажей. Из таблицы видно, что у персонажей X и Y есть еще «лишние» члены, которых нет в многочлене с позиции внешнего исследователя: это Tx^3 и Tx^2.

Условимся особым образом изображать члены, которые «неизвестны» персонажам. Член Tx «неизвестен» персоналу X, поскольку его внутренний мир содержит только два члена T и Tx^3. Условимся этот факт фиксировать следующим образом: $Tx\overline{x}$. Читается это так: *«Tx* не лежит перед *X».*

Аналогично обозначим «неизвестность» персонажу X остальных элементов

$$: Tx^4\overline{x}, Ty\overline{x}, Txy\overline{x}, Tx^2y\overline{x}, Ty^2\overline{x}$$

Члены, неизвестные персонажу Y, обозначим соответственно

$$Tx^4\overline{y}, Txy\overline{y}, Tx^2y\overline{y}, Ty^2\overline{y}$$

Теперь мы можем дополнить многочлен Ω этими членами и, распространив на $\overline{x}$ и $\overline{y}$ закон дистрибутивности и вынеся их за скобку, получим

$$\Omega^* = T + (T + Tx^3)x + (T + Tx + Tx^2 + Ty)y + (Tx^4 + Ty + Txy + Tx^2y + Ty^2)\overline{x} +$$
$$+ (Tx^4 + Txy + Tx^2y + Ty^2)\overline{y}.$$

Легко видеть, что каждый конечный многочлен Ω может быть представлен в виде

$$\Omega^* = T + \Omega^1 x + \Omega^2 y + \Omega^3\overline{x} + \Omega^4\overline{y}$$

Такая запись позволяет фиксировать не только содержимое «внутренних миров», но и члены, которые отсутствуют во внутреннем мир персонажа, но присутствуют в системе с позиции внешнего исследователя.

Часть многочлена Ω*, представляющую собой многочлен ω, мы будем называть *позитивной формой,* сумму $\Omega^3\bar{x} + \Omega^4\bar{y}$ - соответственно, *негативной формой*.

Рефлексивный многочлен как способ регистрации ограничений

Представим себе такую условную ситуацию. Пусть в некотором городе каждый житель, сидя вечером у камина, самостоятельно догадался, что представление приехавшего цирка, назначенное на завтра, не состоится. И абсолютно уверен в своем прогнозе. После этого по радио было объявлено, что представление отменяется. Спрашивается, получил ли каждый житель города новую информацию из этого сообщения? На первый взгляд кажется, что нет. Ведь каждый и так уже знал, что представление будет отменено. В действительности же получена новая информация. После объявления каждый житель города знает, что каждый житель города знает, что представление отменяется.

Обозначим жителей города символами $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Жителя города в момент, когда он догадался, что представление отменяется, можно изобразить многочленом

$$\Omega = T + Te_i$$

Другие жители вместе с их внутренними мирами не присутствуют в его внутреннем мире.

Используя негативную форму, с позиции внешнего исследователя это можно изобразить так:

$$\Omega^* = T + Te_i + \sum_j Te_j\bar{e}_i$$

Информация, переданная по радио, «сняла» черточку с $\bar{e}_i$ и многочлен Q^* превратился в многочлен

$$\Omega^{**} = T + Te_i + \sum_i Te_j e_i = T + \left(T + \sum_j Te_j\right)e_i$$

Итак, мы видим, что публичное объявление известной каждому информации приводит к изменению рефлексивного многочлена; в нем появляются внутренние миры других персонажей с воспринятой информацией.

Рефлексивный анализ не дает нам возможности рассматривать процесс генерации решении как таковой. Он задает лишь рамки, выделяющие «тип информации», который может участвовать в процессе генерации решения.

Когда мы рассматриваем каждого жителя до того как он услышал сообщение по радио, единственное ограничение, которое мы обязаны учитывать,—это отсутствие в его внутреннем мире членов Te_j, — сам он «знает», но не учитывает того, что другие могут «знать». Сообщением по радио персонаж переведен в другое состояние. Во внутреннем мире появились члены Te_j, но отсутствуют члены вида Te_j,e_k. Произошло изменение ограничений.

Пусть персонаж X изображается таким многочленом:

$$\Omega = T + (T + Tx)x.$$

Перейдя к «позитивно-негативной» форме, мы можем записать

$$\Omega^* = T + (T + Tx)x + Tx\overline{x}$$

Член $Tx\overline{x}$ фиксируя факт, что член Txx «неизвестен» персонажу (но известен внешнему исследователю), показывает, что персонаж не может его «использовать» при осознанном генерировании решения. Персонаж «свободен» лишь в рамках своего внутреннего мира, который изображен многочленом $T + Tx$.

Предположим, что персонаж совершил акт осознания оператором $1+x$:

$$[T + (T + Tx)x)(1 + x) = T + (T + T + Tx + Txx)x.$$

Ограничение, которое было прежде, снялось: член Txx «известен» персонажу X, однако ему неизвестен член $Txxx$. Персонаж стал более свободным, но ограничения не исчезли, а просто изменились.

Рассмотрим теперь, в плане анализа изменения ограничений, «замыкающие операторы». Как мы уже оказали выше, замыкающие операторы, изменяя многочлены, тем не менее оставляют их некоторые очень важные свойства неизменными. Рассмотрим оператор $1+x+yx$. Применяя его к многочлену, который представим в виде $T+(\Omega+\Omega y)x$, мы снова получим многочлен, который представим подобным образом. Итак, структура, фиксируемая выражением $T+(\Omega+\Omega y)x$ инвариантна к применению оператора $1+x+yx$. Эту структуру мы можем рассматривать как ограничение более «высокого порядка», чем те, которые фиксируются некоторым конкретным многочленом. Таким образом, замыкающий оператор *не снимает определенных структурных ограничений,* но конечно меняет ограничения, налагаемые конкретным многочленом. Персонаж, вооруженный лишь одним замыкающим оператором, «замкнут» в классе многочленов, обладающих определенной структурой. Лишь изменение, оператора осознания позволяет ему обрести «свободу» и «уйти» из этого класса многочленов.

Мы можем теперь перейти к более общему понятию акта осознания. Акт осознания — это процедура, изменяющая ограничения. В таком смысле любая содержательно введенная функция, определенная на множестве рефлексивных многочленов и черпающая значения из этого же множества, может рассматриваться как особый оператор осознания. Правда, термин «осознание» мы обязаны будем распространить и на преобразования, характеризующиеся упрощением многочлена. Ограничения при этом усиливаются, а не ослабляются: персонаж теряет часть своей свободы, а не приобретает ее, как в случае работы оператора-множителя.

Другой путь построения рефлексивного анализа

В первом издании этой книги оператор осознания вводился иначе. Произвольный многочлен, фиксирующий взаимоотношения двух персонажей, можно привести к виду

$$\Omega = T + \Omega_1 x + \Omega_2 y\,.$$

Осознание понималось как отражение всей ситуации одним и персонажей. Пусть, например, акт осознания произвел X. Вся система изменилась, «внутри» персонажа X

оказался многочлен Ω, а персонаж Y и плацдарм T остались неизменными. Таким образом, система перешла в состояние

$$(T + \Omega_1 x + \Omega_2 y)x + \Omega_2 y + T .$$

Эта процедура напоминает нахождение формальной первообразной и мы обозначили ее соответствующим образом:

$$\int^{x} \Omega = \Omega x + C, \quad C = \Omega_2 y + T,$$

Аналогично

$$\int^{y} \Omega = \Omega y + C, \quad C = \Omega_1 x + T.$$

В качестве константы C выступают члены, не имеющие крайним правым индексом имени персонажа, который производит осознание.

В случае, когда осознание производят оба персонажа одновременно,

$$\int^{x}\int^{y} \Omega = \Omega x + \Omega y + T.$$

Вводилась и операция, обратная интегрированию, — нахождение частной производной. Она истолковывалась двояко: с одной стороны, она понималась как .выделение внутреннего мира персонажа, с другой стороны, — как нахождение состояния системы, предшествующего акту осознания (конечно, при условии, что данное состояние было порождено актом осознания в указанном выше смысле). Формально операция дифференцирования определялась так:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \Omega_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Omega_2$$

Если многочлен Ω_1 представим в виде $\Omega_1 = T + \Omega_3 x + \Omega_4 y,$ то можно найти вторую производную, т.е. извлечь внутренний мир соответствующего персонажа, лежащий внутри уже извлеченного внутреннего мира:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x} = \Omega_3, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \Omega_4$$

Процедуру дифференцирования можно проводить до тех пор, пока очередная производная не примет значение T.

Нетрудно видеть, что такое введение оператора осознания приводит нас к очень узкому классу многочленов. Чтобы расширить класс, вводились дополнительные искусственные приемы.

Использование процедуры умножения на многочлен как аналога процесса осознания теперь представляется автору более эффективным. Операция дифференцирования может быть использована и в новом варианте рефлексивного анализа, однако можно ее истолковать лишь как процедуру выделения внутреннего мира персонажа.